ファレイ分数のべき和の漸近展開について (解析数論と数論諸分野の交流)

吉元, 昌己

数理解析研究所講究録
1091巻 1999年 226-232

ファレイ分数のべき和の漸近展開について

九大数理（D3）
吉元 昌己（Masami Yoshimoto）

本稿は、ファレイ分数のべき和の漸近展開をこれまでに知られていたものよりも更に詳しい誤差項まで求めた結果を示すものである。

位数$[x]$のファレイ分数を、$(0,1]$区間の既約分数列で分母の大きさがx以下のものを小さい順に並べ直したもので定義し、その集合をF_xとする：

$$F_x := \{ \rho_\nu = b_\nu / c_\nu \mid 1 \le b_\nu \le c_\nu \le x,\ (b_\nu, c_\nu) = 1 \}.$$

以下ρ_νは位数$[x]$のファレイ分数とする。

$\Phi(x)$をオイラー函数$\phi(n)$の、$M(x)$をメービウス函数$\mu(n)$の和函数とする：

$$\Phi(x) := \sum_{n \le x} \phi(n), \quad M(x) := \sum_{n \le x} \mu(n).$$

このときF_xの定義より

$$\# F_x = \Phi(x) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + E(x),$$

ここで
$$E(x) = \begin{cases} O(x \log x) & (\text{Mertens}) \\ O(x (\log x)^{2/3} (\log \log x)^{4/3}) & (\text{Walfisz}) \end{cases}$$

が成立する。

<u>記号</u>

$z\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{N}$ とする。

$$S_z(x) := \sum_{m\le x} M\left(\frac{x}{m}\right)\frac{1}{m^z} = \sum_{m\le x}\mu(m)\sum_{n\le x/m}\frac{1}{n^z}.$$

特に $S_0(x)=1$, $S_{-1}(x)=\Phi(x)$。

$$U_z^{(k)}(x) := \sum_{n\le x}\overline{B}_k\left(\frac{x}{n}\right)\frac{\mu(n)}{n^z},$$

ここで $B_k(x)$ は k 次のベルヌーイ多項式、$\overline{B}_k(x)=B_k(x-[x])$ は周期的 k 次ベルヌーイ多項式。特に $U(x)=U_1^{(1)}(x)$.

$\mathrm{Re}\, z>1$ のとき、

$$C_z^{(k)}(x) := \sum_{n=1}^{\infty}\overline{B}_k\left(\frac{x}{n}\right)\frac{\mu(n)}{n^z}.$$

また

$$D(x) := \sum_{n\le x}\overline{B}_1\left(\frac{x}{n}\right)\frac{\mu(n)}{n}\log\frac{x}{n}$$
$$= O(\log^2 x) \quad (\text{trivially})。$$

以下簡単の為、$A>0$ を計算可能な絶対定数とし、$\delta(x)$ を

$$\delta(x)=\delta_A(x) := \exp\left(-A(\log x)^{0.6}(\log\log x)^{-0.2}\right)$$

とする。このとき、素数定理と $M(x)=O(x\delta(x))$ は同値。また $\Phi(x)$ の残余項 $E(x)$ は

$$E(x) = -xL(x) + O(\delta(x))$$

と表わすことができる。

本稿の目的である漸近展開については、以下のミコラスの結果が知られている：

<u>Known results</u> ([Mik1], Thm 3 ; [Mik2], Thms 3, 4)

(i) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} \rho_\nu^{-\lambda}$

$$= \begin{cases} \dfrac{\Phi(x)}{1-\lambda} + O\left(x\exp\left(-c(\log x)^{\kappa}\right)\right) & \text{if } \lambda < 0 \\ & (\tfrac{1}{2} < \kappa < \tfrac{11}{21}) \\ \dfrac{\Phi(x)}{1-\lambda} + \dfrac{\zeta(\lambda)}{(1+\lambda)\zeta(1+\lambda)} x^{1+\lambda} + O(x) & \text{if } 0 < \lambda < 1 \\ \dfrac{\zeta(\lambda)}{(1+\lambda)\zeta(1+\lambda)} - \dfrac{3}{\pi^2(\lambda-1)} x^2 + O(x^\lambda) & \text{if } 1 < \lambda < 2 \\ \dfrac{\zeta(\lambda)}{(1+\lambda)\zeta(1+\lambda)} + O(x^\lambda) & \text{if } \lambda \geqq 2 . \end{cases}$$

(ii) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} \rho_\nu^{-1} = \frac{x^2}{2\zeta(2)}\left\{\log x + \gamma - \frac{1}{2} - \frac{\zeta'}{\zeta}(2)\right\} + O(x\log^2 x)$,

ここで γ はオイラー定数。

上の結果に対し、素数定理とワルフィスの方法及び結果を用いることで、更に小さな誤差項まで求めることができる。

定理1. $z\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{N}$とする。このとき$\mathrm{Re}\,z\neq 1$ならば

$$U_z^{(k)}(x)=\begin{cases} C_z^{(k)}(x) & \text{if } \mathrm{Re}\,z>1 \\ 0 & \text{if } \mathrm{Re}\,z<1 \end{cases} + O(x^{1-\mathrm{Re}\,z}\,\delta(x)),$$

また$\mathrm{Re}\,z=1$の場合

$$U_z^{(k)}(x)=O((\log x)^{2/3}(\log\log x)^{4/3})$$

が成立する。

定理2.

(i) $z\in\mathbb{C}$, $\neq 0$とする。このとき

$$S_z(x)=\begin{cases} 0 & \mathrm{Re}\,z>0 \\ \dfrac{x^{1-z}}{(1-z)\zeta(1-z)} & \mathrm{Re}\,z\leq 0 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 0 & \mathrm{Re}\,z\geq -1 \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{l}\frac{(-1)^r}{r}\binom{-z}{r-1}C_{1-z-r}^{(r)}(x)\,x^{1-z-r} & \mathrm{Re}\,z<-1 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} 0 & -\mathrm{Re}\,z\notin\mathbb{N} \\ \dfrac{(-1)^{\mathrm{Re}\,z}}{\mathrm{Re}\,z}\dbinom{-z}{-\mathrm{Re}\,z-1}x^{1-i\,\mathrm{Im}\,z}\,U_{1-i\,\mathrm{Im}\,z}^{(-\mathrm{Re}\,z)}(x) & -\mathrm{Re}\,z\in\mathbb{N} \end{cases}$$

$$+O(x\,\delta(x)),$$

ここで

$$l=-[\mathrm{Re}\,z]-1.$$

(ii) $-S'_{-1}(x) = \sum_{n \le x} M\left(\frac{x}{n}\right) n \log n$

$$= \frac{x^2}{2\zeta(2)} \left\{ \log x - \frac{1}{2} - \frac{\zeta'}{\zeta}(2) \right\} - xD(x) + O(x\delta(x)).$$

定理3 (Main Theorem)

(i) $z \in \mathbb{C}, \neq 0, 1$ とする。このとき

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} p_\nu^{z} = \frac{\Phi(x)}{1+z}$$

$$+ \begin{cases} 0 & \mathrm{Re}\, z > 0 \\ \dfrac{\zeta(-z)}{(1-z)\zeta(1-z)} & \mathrm{Re}\, z \le 0 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 0 & \mathrm{Re}\, z \geq -1 \\ \zeta(-z) \displaystyle\sum_{r=1}^{l} \frac{(-1)^r}{r} \binom{-z}{r-1} C^{(r)}_{1-z-r}(x)\, x^{1-z-r} & \mathrm{Re}\, z < -1 \end{cases}$$

$$- \begin{cases} 0 & -\mathrm{Re}\, z \notin \mathbb{N} \\ \zeta(-z) \dfrac{(-1)^{\mathrm{Re}\, z}}{\mathrm{Re}\, z} \dbinom{-z}{-\mathrm{Re}\, z - 1} x^{1 - i\,\mathrm{Im}\, z}\, U^{(-\mathrm{Re}\, z)}_{1 - i\,\mathrm{Im}\, z}(x) & -\mathrm{Re}\, z \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$+ O(x\delta(x)),$$

ここで

$$l = -[\mathrm{Re}\, z] - 1.$$

$$\text{(ii)} \sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} \frac{1}{\rho_\nu} = \frac{x^2}{2\zeta(2)}\left\{\log x + \gamma - \frac{1}{2} - \frac{\zeta'}{\zeta}(2)\right\} - xD(x) - \gamma x U(x) + O(x\delta(x)).$$

定理4.

$$D(x) = U(x)\log x + O((\log x)^{4/3}(\log\log x)^{8/3})$$
$$= O((\log x)^{5/3}(\log\log x)^{4/3}).$$

系

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} \frac{1}{\rho_\nu} = \frac{x^2}{2\zeta(2)}\left\{\log x + \gamma - \frac{1}{2} - \frac{\zeta'}{\zeta}(2)\right\} + O\left(x(\log x)^{\frac{5}{3}}(\log\log x)^{\frac{4}{3}}\right).$$

参考文献

[K-K-Y] S. Kanemitsu, T. Kuzumaki and M. Yoshimoto, Some sums involving Farey fractions II, to appear.

[Mik 1] M. Mikolás, Farey series and their connection with the prime number problem I, Acta Sci. Math. (Szeged) 13 (1949), 93–117.

[Mik 2] ———, ——— II, ——— 14 (1951), 5–21.

[Wal] A. Walfisz, Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963.